

J. Gedan

Akustische Grundlagen der Musik

www.pian-e-forte.de
Fachwissen

Schwingungen

Töne sind Schwingungen. Bei klingenden Saiten ist die Schwingung dem Auge durchaus erkennbar, bei Resonanzkörpern ist sie durchaus fühlbar, z.B. wenn man die Hand auf eine schwingende Geigendecke legt.

Schwingungen breiten sich aus, zu sehen an der Welle, die über eine Wasserfläche läuft, und zu hören, denn nur weil die Schallwelle sich im Raum ausbreitet, gelangt sie als Ton oder Geräusch an unser Ohr. Wasserwelle und Schallwelle zeigen aber bereits einen wesentlichen Unterschied: Die Wasserwelle hebt und senkt sich *quer* zur Ausbreitungsrichtung, die Schallwelle, die eine Druckwelle ist, verdichtet und verdünnt sich *in* Ausbreitungsrichtung; das eine ist eine **Transversal**-, das andere eine **Longitudinal**-Welle. Das ist vergleichbar mit dem Unterschied zwischen der Schwingung einer Saite, die senkrecht zur Saitenrichtung ausgelenkt wird, und dem Schwingen eines Gewichts, das an einem Gummiband hängt und auf und ab wippt.

Bei Saiten ist nur die Transversal-Schwingung für die Tonerzeugung relevant, die Longitudinal-Komponente, die durch die Dehnung der Saite ebenfalls auftritt, ist vernachlässigbar, bei Blasinstrumenten geschieht die Tonerzeugung durch Longitudinal-Schwingungen der Luftsäule im Instrumentenrohr.

Wesentlich für eine Schwingung sind drei Parameter:

1. Die **Frequenz**, d.h. die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit; sie bestimmt die **Tonhöhe** und wird in **Hz** (Hertz) gemessen:
1 Hz = 1 Schwingung pro Sekunde, wobei darunter eine volle Schwingungs-**Periode** zu verstehen ist, nämlich 2 Halbschwingungen: eine Saite wird einmal in die eine, dann in die andere Richtung ausgelenkt, im Gegensatz zu der in Frankreich bisweilen noch üblichen Zählweise, nach der 100 Hz gleich 200 *vibrations simples* sind, abgekürzt v.s.
2. Die **Amplitude**, d.h. die Schwingungsweite, sie bestimmt die **Lautstärke** eines Tons.
3. Die **Wellenlänge**, die sich durch die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** ergibt; sie ist der Weg, den die Welle während einer Periode zurücklegt

Zwischen Frequenz und Wellenlänge besteht natürlich ein Zusammenhang, denn je schneller die Schwingung, um so kürzer der Weg, der während einer Schwingung zurückgelegt wird. Große Wellenlängen bedeuten also niedrige Frequenzen, kleine Wellenlängen hohe Frequenzen. Ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit bekannt, genügt es deswegen, nur eines von beiden, die Frequenz oder die Wellenlänge anzugeben.

In der Musik rechnet man im allgemeinen mit den Frequenzen von Tönen, die Wellenlängen sind aber für die Ermittlung von Saiten- und Rohrlängen bedeutsam.

Frequenz und Tonhöhe

Je höher die Frequenz ist, umso höher ist auch der Ton. Sehr tiefe Frequenzen, unter ca. 16 Hz, und sehr hohe sind für das menschliche Ohr nicht mehr wahrnehmbar, wobei die Empfindlichkeit für hohe Töne im Alter abnimmt: Säuglinge hören noch Töne bis ca. 20.000 Hz, Erwachsene nur noch bis ca. 16.000 Hz und ältere Menschen evtl. nur noch bis 12.000 Hz und darunter.

Welchen Tonhöhen entspricht dies?

Dies wäre zunächst auch eine Frage nach der *Anzahl* der unterscheidbaren Töne, denn unser Ohr kann sehr geringe Frequenzunterschiede nicht mehr ausmachen und hört aufeinanderfolgende Töne, deren Frequenzen um weniger als 2 % voneinander abweichen, als gleich hoch. (bei gleichzeitig erklingenden Tönen sind auch kleinere Differenzen noch indirekt wahrnehmbar, davon wird noch die Rede sein). Neben diesem *physiologischen* Unterscheidungsvermögen ist aber das *musikalische* relevanter, das einen geringen Frequenzunterschied als Verstimmung, aber nicht als einen anderen Ton hört. Hinzu kommt, daß die Einteilung in diskrete Tonhöhen nicht so sehr von dem physiologischen Unterscheidungsvermögen abhängt, sondern von *musikalischer Logik*. Diese Logik ist allerdings durchaus physikalisch begründet, wie wir noch zeigen werden.

Sinnvollerweise legt man, um die Anzahl der Töne zu bestimmen, deswegen unser Tonsystem zugrunde, das die Tonleiter, bzw. die Oktave, in zwölf Halbtonschritte einteilt. Nach diesen zwölf Halbtonschritten gelangt man dabei wieder zu einer Tonhöhe, die genau dem Anfangston entspricht, aber in höherer Stimmlage liegt, sie hat genau die *doppelte Frequenz* des Ausgangstons. Das ist derselbe Unterschied wie der zwischen Männer- und Frauenstimme, die dieselbe Melodie singen, also Töne, die vom Ohr als identisch wahrgenommen werden und trotzdem verschiedene Frequenzen haben.

Ausgehend von der unteren Hörgrenze, die bei 16 Hz liegt, kann man die Frequenzen bis zur oberen Hörgrenze etwa 10mal verdoppeln, erhält also etwa 10 Oktaven:

Oktave: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.
 Hz: 16 – 32 – 64 – 128 – 256 – 512 – 1024 – 2048 – 4096 – 8192 – 16384
 >-----Singstimme-----<
 >-----Musikinstrumente-----<

Ausgehend von dem Kammerton *a'*, der international auf eine Standardtonhöhe von 440 Hz festgelegt wurde, sieht die Oktaveinteilung des Klaviers so aus:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.
 27,5 – 55 – 110 – 220 – 440 – 880 – 1760 – 3520 Hz
A₁, A, A, a, a', a'', a''', a''''

Wenn der Oktavabstand immer eine Verdopplung der Frequenz bedeutet, so ist damit bereits klar:

Tonabstände werden als gleich groß empfunden, wenn sie dasselbe Frequenz-Verhältnis, nicht wenn sie dieselbe Frequenz-Differenz haben. Oder anders: Unser Ohr hört logarithmisch.

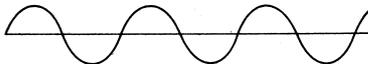
Zwei Töne von 100 und 200 Hz haben ein Frequenzverhältnis von 1:2, das ist eine Oktave; zwei Töne von 500 und 600 Hz ein Verhältnis von 5:6, das ist eine kleine Terz; die Frequenz-Differenz ist in beiden Fällen gleich groß, nämlich 100 Hz, der Tonabstand im zweiten Fall aber wesentlich geringer.

Allerdings ist auch das wiederum nicht nur rein physiologisch zu erklären, d.h. es gibt dafür durchaus physikalische Gründe, die unabhängig von den Eigenschaften unseres Gehörs sind. Der Zusammenhang wird weiter unten bei der Besprechung der *Teiltöne* klar werden.

Bedeutsam ist das logarithmische Tonhöhenempfinden für die Abnahme der Hörempfindlichkeit im Alter. Wenn nämlich Säuglinge noch bis 20.000 Hz hören und ein alter Mensch evtl. nur noch bis 10.000 Hz, so heißt das nicht, daß der alte Mensch die Hälfte seines Gehörs eingebüßt hätte. Es fehlt ihm nur die letzte Oktave und nur eine Quarte gegenüber einem jüngeren Erwachsenen, der vielleicht noch bis 15.000 Hz hört, und dieses Defizit liegt in einem Bereich, den sowieso kein Musikinstrument mehr nutzt. Der Hörverlust ist also weniger dramatisch, als er anhand der Frequenzen zu sein scheint.

Schwebungen

Stellt man den Verlauf einer gleichmäßigen Schwingung abhängig von der Zeit graphisch dar, so erhält man eine Sinuskurve:

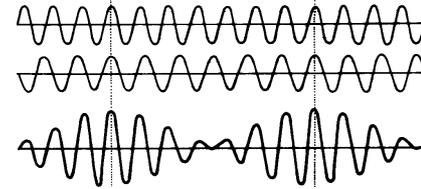


[Abb. 1] Sinuskurve

Diese Kurve kann, wie bei einer Wasserwelle, durchaus dem tatsächlichen Erscheinungsbild einer sich ausbreitenden Schwingung entsprechen, muß es aber

nicht. Bei einer Longitudinal-Welle wie der Druckwelle des Schalls nämlich darf man sie nicht mit der Bewegung der Luftteilchen verwechseln, d.h. die y-Achse repräsentiert hier nicht direkt die Bewegungsform, sondern die Höhe des Luftdrucks zu einem bestimmten Zeitpunkt.

Erklingen zwei Töne gleichzeitig, so ergibt sich ihr Kurvenbild aus der Addition zweier Sinuskurven, d.h. es entsteht aus zwei Kurven verschiedener Frequenz eine *Resultierende*:



[Abb. 2] Zwei Sinuskurven und ihre Resultierende

Diese Resultierende ist natürlich keineswegs ein Theoretikum, sondern ein Faktum, denn wenn die Luft zwei Töne gleichzeitig an unser Ohr tragen soll, kann sie nicht gleichzeitig zwei *verschiedene* Schwingungen ausführen, sondern nur die resultierende Druckwelle transportieren. Zwei Schwingungen können sich dabei sowohl *addieren*, nämlich wenn Wellenberg und Wellenberg aufeinandertreffen, als auch *auslöschen*, nämlich wenn Wellenberg und Wellental aufeinandertreffen. Das ist jedem geläufig, der weiß, daß man zwei Lautsprecherboxen immer mit gleicher Polung anschließen sollte, da die sonst gegenphasigen Schwingungen vor allem die Baßfrequenzen abschwächen würden.

Überlagern sich zwei Schwingungen unterschiedlicher Frequenz, so geschieht folgendes:



[Abb. 3] Zwei überlagerte Sinuskurven

Man sieht, daß die eine die andere allmählich überholt, so daß die Wellen, die gleichphasig begonnen haben, irgendwann gegenphasig sind und irgendwann

wieder gleichphasig, und dies in stetem Wechsel, so daß sie sich abwechselnd addieren und auslöschen: Wir hören eine Resultierende, ähnlich der in Abb. 2, die in der Lautstärke völlig gleichmäßig schwankt. Man sagt der Ton „*schwebt*“. (Der physikalisch allgemeinere Begriff für die Überlagerung von Wellen ist die **Interferenz**.) Die Anzahl der Schwebungen pro Sekunde entspricht dabei genau dem Frequenzunterschied, d.h. ein Ton von 100 Hz und einer von 102 Hz erzeugen eine Schwebung von 2 Hz.

Welchem Tonhöhenunterschied der beiden Töne dies entspricht, ist von der Tonlage abhängig, denn hierfür ist ja das Verhältnis, nicht die Differenz maßgebend: Eine Schwebung von 5 Hz bedeutet bei zwei Tönen von 25 und 30 Hz einen Tonhöhenunterschied von 5:6, das ist eine kleine Terz; bei zwei Tönen von 1000 und 1005 Hz aber ist es nur eine Verstimmung derselben Tonhöhe.

Schwebungen sind der Grund, weswegen auch kleine Differenzen zwischen zwei Tönen noch wahrnehmbar sind, wenn sie gleichzeitig erklingen. Schwebungen von etwa einem halben Hz kann man meist noch sehr gut ausmachen, das entspricht bei 2000 Hz einem Tonhöhenunterschied von 0,25 %. Das ist genauer, als handelsübliche Stimmgeräte es noch anzeigen könnten.

Wer Schwebungen noch nie bewußt wahrgenommen hat, braucht nur eine einzelne Klaviertaste im Diskant anzuschlagen: Würde das Klavier nicht erst kürzlich gestimmt, ist es höchst unwahrscheinlich, daß alle drei Saiten des Tones exakt dieselbe Tonhöhe haben und der Klang schwebungsfrei ist; wahrscheinlicher ist, daß man im Hören von Schwebungen nur zu ungeteilt ist.

Differenztöne

Bekanntlich kann unser Auge sehr schnell aufeinanderfolgende Einzelbilder nicht mehr unterscheiden, sondern nimmt sie als kontinuierliche Bewegung wahr; erst dadurch werden Film und Fernsehen möglich. Für das Gehör gilt Ähnliches, d.h. es kann einzelne Impulse, die zu schnell aufeinanderfolgen, nicht mehr differenzieren. Steigert man z.B. das Tempo von Trommelschlägen, so wird man anfänglich noch einzelne Schläge wahrnehmen, mit wachsender Geschwindigkeit geht der Höreindruck aber eher in ein ratterndes Geräusch, ab einer bestimmten Geschwindigkeit sogar in einen einzigen Ton über: Das Ohr nimmt nicht mehr 20 einzelne Impulse pro Sekunde, sondern einen kontinuierlichen Ton von 20 Hz wahr (wenn ein Trommler denn so schnell spielen könnte.). So erklärt sich auch, warum ein Automotor „brummt“, obwohl wir eigentlich eine schnelle Folge von Explosionen hören müßten. Dieses begrenzte Auflösungsvermögen unseres Ohrs führt zu einem wichtigen Phänomen, den *Differenztönen*.

Unser Ohr hört nämlich Schwebungen ab einer bestimmten Frequenz nicht mehr als aufeinanderfolgende Lautstärkeschwankungen, sondern als Ton. Erklingen zwei Töne gleichzeitig, die in genügendem Abstand voneinander stehen, ist darum zusätzlich immer auch ein dritter, tieferer Ton zu hören, dessen Frequenz sich aus der Differenz der beiden Primärschwingungen ergibt, d.h. zwei Töne von 100 und 150 Hz erzeugen den Differenzton $150 \text{ Hz} - 100 \text{ Hz} = 50 \text{ Hz}$. Diesen „*Geisterton*“ wahrzunehmen, verlangt wiederum ein wenig Übung und gelingt meist nur, wenn man weiß, auf welcher Tonhöhe das Ohr ihn zu suchen hat. Die Differenztöne der wichtigsten Zusammenklänge (große Sexte bis kleine Terz) sind folgende:



Man hört also z.B. bei der großen Sexte immer die Unterquinte, bei der Quinte immer die Unteroktave. Allerdings tritt der Differenzton nur dann deutlich in Erscheinung, wenn das Intervall, das ihn verursacht, möglichst rein ist. Und das hängt wiederum mit einem anderen Phänomen zusammen, nämlich mit den *Ober-* oder *Teiltönen*.

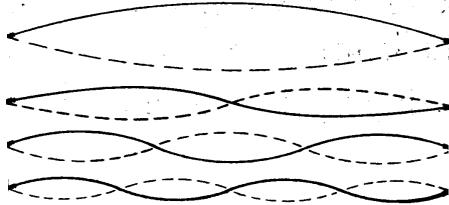
Teiltöne

Weiter oben hatten wir gesagt, daß die Saite *transversal* schwingt, also quer zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Das scheint bei der Saitenschwingung aber keinen rechten Sinn zu machen, denn von *Ausbreitung* der Schwingung auf der Saite kann eigentlich keine Rede sein, die Saite schwingt ja einfach nur als ganzes hin und her. So zumindest sieht es das Auge.

Nun, das Auge sieht es falsch. Tatsächlich läuft eine Welle über die Saite, die am Saitenende reflektiert wird. Davon ist allerdings nichts zu erkennen, denn die reflektierte Welle sieht genauso aus wie die ursprüngliche, weil nur solche Wellen entstehen können, die an den Saitenenden einen Knotenpunkt haben, also einen Nulldurchgang und keinen Schwingungsbauch (Wellenberg), denn dort ist die Saite ja gar nicht schwingfähig. Physiker nennen das eine **stehende Welle**. Sie entsteht nicht nur bei Saitenschwingungen, sondern auch bei schwingenden Luftsäulen im Rohr von Blasinstrumenten. (Die Wellenlänge der transversalen Saitenschwingung, von der hier die Rede ist, darf dabei nicht verwechselt werden mit der Wellenlänge der longitudinalen Schallschwingung, nur letztere kann

anhand der Schallgeschwindigkeit bestimmt werden, die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, die über die Saite läuft, hat damit nichts zu tun.)

Vorstellen kann man sich den Vorgang so, daß Saiten (und Luftsäulen und andere schwingfähige Körper) nicht grundsätzlich nur in einer einzigen Frequenz schwingen, sondern in allen physikalisch möglichen; möglich sind aber nur Wellenlängen, die zur Saitenlänge passen, d.h. von genau einer, einer halben, einem Drittel, einem Viertel Saitenlänge usw.

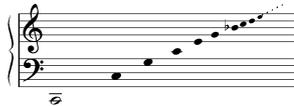


[Abb. 4] Stehende Wellen

Wenn aber so mehr als *eine* Welle entsteht, dann müßte doch auch mehr als *ein* Ton zu hören und die Teilwellen sollten dem Auge erkennbar sein?

Nun, die Teilwellen sind dem Auge deswegen nicht erkennbar, weil die Saite nicht mehrere verschiedene Bewegungen gleichzeitig ausführen kann, sondern nur die resultierende, die sich aus der Addition dieser Wellen ergibt, d.h. die Saite schwingt natürlich weiterhin als ganzes, aber die Bewegung ist komplizierter, als das träge Auge sie wahrnehmen könnte, das ja nur die Begrenzungen der Schwingungsamplitude und dazwischen ein diffuses Feld erkennt.

Wenn nicht unser Auge, so kann doch unser Ohr die Teilschwingungen sehr wohl wahrnehmen, und wer es bisher noch nie bewußt gehört hat, braucht nur einen tiefen Klavierton, z.B. das große C, anzuschlagen und wird nach ein wenig Übung durchaus der Töne folgender Reihe gewahr – wenn nicht aller, so zumindest einiger davon:



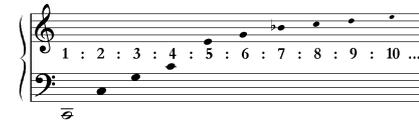
Hier gilt dasselbe wie bei den Differenztönen: Weiß das Ohr erst einmal, wo es die zusätzlichen Töne zu suchen hat, ist es auch bald in der Lage, sie bewußt wahrzunehmen.

Da alle Töne aller Musikinstrumente grundsätzlich aus Teiltönen bestehen, nennen die Physiker das, was der Musiker als *Ton* bezeichnet, einen *Klang*, und nur die reine Sinusschwingung, wie sie annähernd eine Stimmgabel erzeugt oder elektronische Tongeneratoren sie produzieren können, nennt der Physiker einen *Ton*. (Auch die Töne elektronischer Generatoren sind jedoch nie ganz perfekt reine Sinusschwingungen, man gibt ihren Teilton-Anteil in Prozent an und nennt dies den *Klirrfaktor*.) Der Musiker, der eine Tonleiter spielt, spielt also in Wahrheit keine Einzeltöne, sondern sozusagen immer ganze Mixturen:



Diese sind hier bis zum sechsten Teilton notiert. Theoretisch jedoch setzt sich die Reihe nach oben immer weiter fort, bis ihr physikalische Gründe, z.B. die Saitensteifigkeit, ein Ende setzen; außerdem liegen die höchsten Teiltöne außerhalb des menschlichen Hörbereichs.

Wellenlänge und Frequenz hängen, wie erwähnt, voneinander ab: Halb so große Wellenlänge entspricht doppelter Frequenz, ein Drittel so große dreifacher, ein Viertel vierfacher usw. Damit sind auch die Frequenzen der Teiltöne gegeben, die immer genau ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz betragen:



Dem versierten Notenleser wird an diesem Notenbild sofort auffallen, daß die ersten sechs Teiltöne einen Dur-Akkord bilden. Und er wird sich vielleicht die Frage stellen, wieso Teiltonreihe und Notenschrift überhaupt kongruent sind. Das ist sozusagen dieselbe Frage wie die, ob zuerst das Huhn da war oder das Ei. Die Erklärung ist einfach: Zwar entstand die Notenschrift nicht aufgrund der Kenntnis der Teiltonreihe, aber das Tonsystem, das wir uns „*erfunden*“ haben, geht insofern auf die Teiltonreihe zurück, als diese die Frequenzverhältnisse von brauchbaren

Zusammenklängen bestimmt., wie wir weiter unten noch sehen werden. Und ein Tonsystem, das auf diesen brauchbaren Zusammenklängen aufbaut, muß zwangsläufig zu einer Notenschrift führen, die Teiltonreihen darstellen kann.

Bevor wir dies weiter erläutern, noch ein Wort zu den Begriffen:

Oft wird anstelle von *Teiltönen* (auch *Partialtönen*) von *Obertönen* und *Obertonreihe* gesprochen. Der Unterschied ist schlicht der, daß man bei der Obertonreihe zwischen einem Grundton und *zusätzlichen* Obertönen unterscheidet, während bei dem Begriff *Teilton* der Grundton einbezogen ist. Der erste Teilton ist also der Grundton, der zweite Teilton der erste Oberton. Physikalisch betrachtet ist die Bezeichnung *Teiltöne* sinnvoller, denn der Grundton nimmt eigentlich keinerlei Sonderstellung ein. Außerdem liefert uns die Numerierung ab dem Grundton die Frequenzverhältnisse, denn erste und zweite Teiltonfrequenz verhalten sich wie 1:2, zweite und dritte wie 2:3, usw.

Man nennt dies auch „harmonische“ Verhältnisse und bezeichnet die Obertöne als **Harmonische**.

Teiltöne und Klangfarbe

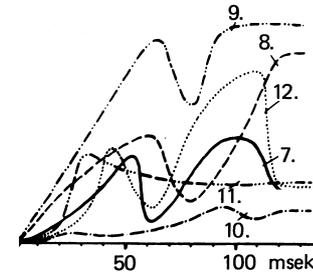
Die Teiltonreihe ist auf allen Musikinstrumenten dieselbe. Allerdings kann die Art der Tonerzeugung durchaus auf ihre Zusammensetzung Einfluß haben, d.h. die Intensität einzelner Teiltöne kann sehr unterschiedlich sein, evtl. können einige auch ganz fehlen. Zusätzlich sind Ein- und Ausschwingvorgänge auf verschiedenen Instrumenten unterschiedlich, die Teiltöne bilden sich am Tonanfang verschieden schnell heraus und klingen verschieden schnell ab. Obendrein entstehen auch Geräusche, vor allem am Tonanfang, sei es das Klopfen beim Anschlagen von Saiten, das Bogengeräusch bei Streichinstrumenten oder das Luftgeräusch bei Flöten. All dies trägt in erheblichem Maße zur Klangfarbe eines Tones bei, und das Obertonspektrum weist für jedes Instrument eine charakteristische Zusammensetzung auf.

Aber auch auf ein und demselben Instrument kann man Einfluß darauf nehmen. Beispielsweise lassen sich Teiltöne vollständig unterdrücken, bei Blasinstrumenten durch die Lippenspannung, die die Luftsäule dann nur noch ab dem zweiten oder dritten Teilton schwingen läßt, dem Bläser als *Überblasen* geläufig, bei Saiteninstrumenten, indem man auf die Form der Saitenschwingung Einfluß nimmt. Das kann z.B. dadurch geschehen, daß man die Saite dort, wo der erste Teilton die weiteste Amplitude hat, also einen Schwingungsbauch, leicht berührt und so die Entstehung des ersten Teiltons verhindert. Streichern ist dies als Möglichkeit zur Erzeugung von *Flageolett*-Tönen bekannt; außerdem weiß jeder Streicher, daß die Kontaktstelle des Bogens wesentlichen Einfluß auf die

Klangqualität hat, denn dort, wo der Bogen die Saite anstreicht, entsteht natürlich ein Schwingungsbauch, und alle Teiltöne, die hier ein Amplituden-Minimum, also einen Schwingungs-*Knoten*, haben, können sich nicht oder nur wenig ausbilden.

Daß Obertöne wesentlich zur Charakteristik eines Tones beitragen, erklärt auch, warum ein Sinuston, beispielsweise der einer Stimmgabel, so langweilig klingt, er ist zosuzagen ein Ton ohne Klangfarbe.

Die Zusammenhänge zwischen Obertonspektrum und Klangfarbe sind sehr komplex, so daß die Akustiker zwar das Spektrum eines Instrumentes analysieren können, aber umgekehrt aus vorhandenen Meßwerten nicht unbedingt den Klangcharakter voraussagen können.



[Abb. 5] **Realer Einschwingvorgang eines Musikinstruments**
Aufzeichnung der Lautstärke einzelner Teiltöne in den ersten Millisekunden

Teiltöne und Resonanz

Das Phänomen der **Resonanz** ist jedem, auch dem Nichtmusiker, aus dem Alltag geläufig. Es ist z.B. verantwortlich, wenn bei Radiomusik das Gehäuse des Geräts oder des Lautsprechers bei bestimmten Tönen mitklirrt oder Geschirr in einem Schrank in Schwingung gerät. Dies ist immer dann der Fall, wenn der mitschwingende Gegenstand selber in der Lage ist, in der anregenden Frequenz zu schwingen, diese also zu seinen Eigentönen gehört.

Eine große Rolle spielt die Resonanz für den Klang von Saiteninstrumenten. Das belegt ein einfaches Experiment auf dem Klavier: Man halte die Taste des großen C stumm nieder, so daß der Dämpfer von der Saite abgehoben ist, und schlage kurz und kräftig das kleine g an. Obwohl die g-Saite sofort wieder verstummt, klingt ihr

Ton weiter, nämlich als 3. Teilton der C-Saite, die durch Resonanz zum Mitschwingen angeregt wurde.

Teilton-Resonanzen bei Klaviersaiten sind das wesentliche Charakteristikum des Pedalspiels. Sind alle Dämpfer aufgehoben, so werden alle die Saiten zum Mitschwingen angeregt, die mit einem angeschlagenen Ton Teiltöne gemeinsam haben. Betrachtet man dies nur bis zum fünften Teilton, so ergibt sich z.B. beim Anschlag des *cis*'' folgendes:



D.h. das *cis*'' schwingt auf der A-Saite als fünfter, auf der *cis*-Saite als vierter, auf der *fis*-Saite als dritter und auf der *cis*'-Saite als zweiter Teilton mit. Dies ist jedoch nur ein kleiner Teil der Resonanzen, denn auch das angeschlagene *cis*'' besitzt ja Obertöne, und jeder davon hat Resonanz auf zahlreichen weiteren Saiten.

Allerdings ist das abhängig davon, wie genau die Tönhöhen zusammenfallen, deswegen ist auch bei Streichinstrumenten die Resonanz der Nachbarsaiten sehr wichtig, denn sie ist es, die dem Geiger überhaupt erst die Kontrolle über die exakten Tönhöhen gibt. Verfehlt er nämlich eine Tönhöhe, so bleibt auch die Resonanz aus, der Ton klingt matt und farblos; der Spieler kann also allein an der Klangfarbe des Tons hören, ob er ihn richtig getroffen hat.

Differenztöne zwischen Teiltönen

Wenn die Überlagerung zweier Wellen Interferenzen, also Schwebungen und Differenztöne erzeugt, dann müßten diese eigentlich auch zwischen den Teiltönen entstehen. Ob das wirklich der Fall ist, ist mit dem Ohr allerdings nicht auszumachen, und das hat einen einfachen Grund:

Um zu ermitteln, welche Differenztöne entstehen müßten, muß man nicht erst mit den tatsächlichen absoluten Frequenzen rechnen, sondern braucht nur zugrunde zu legen, daß sie sich immer wie 1:2:3:4:5... verhalten. Zwischen erstem und zweitem Teilton ergibt sich so der Differenzton $2-1 = 1$, ebenso zwischen zweitem und drittem der Differenzton $3-2 = 1$, zwischen drittem und viertem $4-3 = 1$, usw. Außerdem ergibt sich aus $3-1$, $4-2$, $5-3$ usw. immer der Differenzton 2, aus $4-1$, $5-2$ usw. immer der Differenzton 3. Offensichtlich also entstehen durch die Interferenz

keinerlei neue Töne, die Differenztöne verschmelzen vollständig mit der ursprünglichen Teiltonreihe und sind deshalb nicht hörbar.

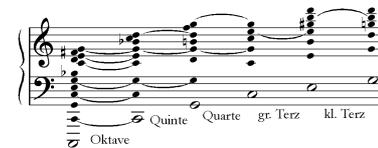
Im folgenden aber werden wir sehen, daß Interferenzen zwischen Teiltönen von Belang sind, wenn zwei *verschiedene* Teiltonreihen zusammen erklingen, im Grunde sind sie sogar der Grund dafür, daß unser Tonsystem so ist, wie es ist.

Zusammenklänge und Teiltöne

Erklingen zwei Teiltonreihen gleichzeitig, so fallen, abhängig vom Frequenzverhältnis der beiden Grundschwingungen, evtl. einige ihrer Teiltöne zusammen. Der trivialste Fall ist die Prime, denn bei zwei gleichen Tönen sind natürlich auch alle Teiltöne gleich. Sind allerdings beide geringfügig gegeneinander verstimmt, entstehen zwischen den Teiltönen Schwebungen, die *nicht* mehr alle gleich sind, denn eine Verstimmung des Grundtons um 1 Hz führt beim zweiten Teilton zu einer Verstimmung von 2 Hz, beim dritten von 3 Hz, beim vierten von 4 Hz usw., die Schwebungen werden also umso schneller, je höher die Teiltonnummer ist. Dies ist etwas, das man sich zum Einstimmen von Primen zunutze machen kann, denn damit steht sozusagen ein akustisches Vergrößerungsglas zur Verfügung: Anstatt auf die relativ langsame Schwebung des Grundtons zu hören, hört man auf die schnellere der höheren Teiltöne und kann dadurch deutlich genauer einstimmen. Beim Chorreinstimmen des Klaviers sind z.B. die Schwebungen des dritten Teiltons meist sehr gut wahrnehmbar.

Tatsächlich ist dieses Vergrößerungsglas der Grund, weswegen man sehr genau einstimmen *muß*: Zwei Töne von 40 und 40,5 Hz ergeben nur 1 Schwebung in 2 Sekunden, immerhin aber weicht der zweite Ton um mehr als 1% vom ersten ab, was im Diskant bereits eine gräßliche Verstimmung wäre. Da jedoch bei den tiefen Klaviertönen die Teiltöne sehr gut hörbar sind, ist dies auch im Baß eine ziemliche Verstimmung, denn der sechste Teilton z.B. schwebt bereits mit 3 Hz. Es ist also keineswegs so, daß tiefe Töne weniger genau gestimmt werden müßten als hohe.

Die gemeinsamen Teiltöne der wichtigsten Intervalle sind:



Der zweite Teilton steht zum ersten im Frequenzverhältnis 2:1. Damit bei der Oktave der erste gemeinsame Teilton wirklich zusammenfällt, muß darum auch ihr Frequenzverhältnis 2:1 betragen. Entsprechend gilt das für alle Intervalle, d.h. das Quintverhältnis muß 3:2 sein, das der Quarte 3:4, das der großen Terz 4:5 und das der kleinen Terz 5:6. Anders ausgedrückt: *Nur wenn die Intervalle dieselben Frequenzverhältnisse zeigen wie die Teiltonreihe, fallen gemeinsame Teiltöne zusammen.*

Abweichungen von diesen natürlichen Frequenzverhältnissen würden zu Schwebungen führen, und unser Ohr empfindet das Intervall je nach Grad der Abweichung als mehr oder weniger dissonant. Damit wird klar, warum unsere Notenschrift auf der Teiltonreihe aufbaut: Bei der Entstehung des Tonsystems fand man automatisch zu Zusammenklängen, die der Teiltonreihe entsprechen, und diese Zusammenklänge bestimmten die Tonhöhen.

Bei der Betrachtung der gemeinsamen Teiltöne fällt auf, daß, je kleiner das Intervall ist, zum einen umso weniger zusammenfallen, zum anderen der erste gemeinsame Teilton umso höher liegt. *Verschiedene Intervalle haben einen unterschiedlichen Klangverschmelzungsgrad.* Auf diesen Umstand wies zum ersten Mal der Physiker Heinrich von Helmholtz hin und erklärte damit zumindest ansatzweise, warum Oktaven als identische Tonhöhen empfunden werden.

Wer das letzte Notenbeispiel genau betrachtet, dem sollte auffallen, daß bei der kleinen Terz ein gemeinsamer Teilton nicht durch einen Bogen gekennzeichnet ist, nämlich das d'' . Dies ist kein Versehen, sondern tatsächlich fallen der siebente Teilton des e und der sechste des g nicht genau zusammen, ihre Frequenzen stehen vielmehr im Verhältnis 35:36, d.h. der siebente Teilton ist tiefer. Tatsächlich entspricht er nicht den Tönen unserer Tonleiter, die sich von den ersten fünf Teiltönen ableitet, weil diese die musikalisch brauchbaren konsonanten Intervalle liefern. Der 6. Teilton ist eigentlich kein zusätzlicher neuer, weil er sich als Oktave des 3. ableiten läßt ($6:3 = 2:1$), der 8. ist die Oktave des 4. ($8:4 = 2:1$), der 9. die Quinte des 6. ($9:6 = 3:2$). Höhere Teiltöne, die sich nicht von tieferen ableiten lassen, ergeben sich nur durch Primzahlen, und ab dem siebenten Teilton paßt keine davon mehr in unser Tonsystem, so daß 7., 11., 13. Teilton usw. durch die Notenschrift nur annähernd wiedergegeben werden können.

Zusammenklänge und Differenztöne

Welche Interferenzen entstehen bei zwei gleichzeitig erklingenden Teiltonreihen? Betrachten wir als Beispiel zwei Töne im Abstand einer Quinte, bei denen sich aus dem Frequenzverhältnis 2:3 folgende Verhältnisse für die Teiltöne ergeben:

	Ton 1	Ton 2	Differenztöne
5. Teilton:	10	15	5
4.	8	12	4
3.	6	9	3
2.	4	6	2
1.	2	3	1

Im Prinzip kann jeder Teilton mit jedem anderen einen Differenzton bilden, so daß dies nur ein kleiner Teil der theoretisch möglichen ist. Zudem entsteht ein Differenzton immer mehrfach, denn der Differenzton 1 z.B. ergibt sich auch aus 4-3 oder 8-9. Entspricht die Quinte nicht genau dem Verhältnis 2:3, weichen diese mehrfach entstehenden Töne voneinander ab und erzeugen wiederum Schwebungen, sind dadurch nicht klar definiert und schlechter zu hören. Dies ist ein weiterer Grund, weswegen nur Intervalle, die dem natürlichen Frequenzverhältnis entsprechen, als *rein* empfunden werden.

Daß die Differenztöne umso besser hörbar werden, je reiner ein Intervall ist, kann man sich bei der Intonation und beim Stimmen zunutze machen, was jeder Geiger bestätigen können sollte, der sein Instrument ja in reinen Quinten stimmt. Bei gut gestimmter d' - und a -Saite ist der Differenzton d deutlich wahrnehmbar.

Wie an obiger Tabelle zu erkennen ist, bilden die Differenztöne wiederum Frequenzverhältnisse, die denen der Teiltonreihe entsprechen. Man kann also den Differenzton 1 als Grundton betrachten und erhält dann eine quasi *virtuelle* Teiltonreihe, von der die beiden zusammenklingenden Teiltonreihen Untermengen sind. In Noten sieht das wie folgt aus, wobei Teiltöne des ersten Tons (c) mit dem Hals nach unten, des zweiten (g) mit dem Hals nach oben und Differenztöne, die nicht mit den Teiltönen zusammenfallen, als Raute wiedergegeben sind (einige ergeben sich aus der Differenz höherer Teiltöne, die hier nicht mehr notiert sind):

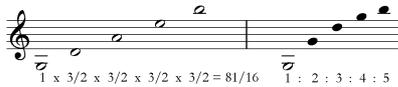


Daß unser Ohr Intervalle nur dann als rein empfindet, wenn alle gemeinsamen Töne genau zusammenfallen, bedeutet nicht, daß es hier gar keine Toleranz gäbe, geringe Verstimmungen sind also erträglich, und ab welcher Abweichung ein Zusammenklang als ausgesprochener Mißklang gehört wird, ist sicher nicht bei allen Menschen gleich.

Es ist aber auch nicht bei allen Intervallen gleich. Je nach Verschmelzungsgrad, also nach Anzahl und Lage gemeinsamer Teiltöne, sind die Intervalle verschieden empfindlich für Verstimmungen. Am empfindlichsten sind Prime und Oktave, während Terzen ein gewisses Maß an Unreinheit vertragen. Allerdings heißt dies nicht, daß diese dann nicht hörbar wäre, eine *reine* Terz klingt in jedem Fall deutlich besser.

Rein ergibt unrein

Man kann neue Töne durch Schichtung der reinen Intervalle erhalten, z.B. indem man vier Quinten übereinanderlegt; dann erreicht man ausgehend vom *g* das *h''*. Derselbe Ton ergibt sich jedoch auch aus der Obertonreihe des *g*, denn dort ist das *h''* der fünfte Teilton. Nun läßt sich allerdings leicht errechnen, daß vier Quinten nicht 5:1 ergeben, sondern etwas mehr:



Die vier Quinten ergeben ein Intervall, das um ein 16tel größer ist als der fünfte Teilton. Diese Differenz ist zu klein, um einen neuen verwertbaren Ton zu ergeben, aber groß genug, um als deutliche Verstimmung hörbar zu werden. Es scheint so, als wollten die reinen Intervalle nicht recht zusammenpassen, und zwar unabhängig davon, welche man kombiniert:

- drei große Terzen ($5/4 \times 5/4 \times 5/4$) ergeben keine Oktave ($2/1$),
- vier kleine Terzen ebenfalls keine Oktave ($6/5 \times 6/5 \times 6/5 \times 6/5$),
- und drei Quinten ($g-d^{\flat}-a^{\flat}-e^{\flat}$) keine oktavierte Sexte ($g-e^{\flat}$).

Dergleichen haben schon die alten Griechen erkannt, deswegen haben einige dieser Differenzen griechische Namen: Den Unterschied zwischen drei großen Terzen und der Oktave nennt man **kleine Diesis**, den Unterschied zwischen vier kleinen Terzen und der Oktave **große Diesis**, und der Unterschied zwischen vier Quinten (z.B. *g-d-a-e-h*) und der großen Terz (*g-h*) heißt **syntonisches** oder **didymisches Komma**. Keinen Namen gibt es für die Differenz zwischen drei Quinten und einer großen Sexte (*g-d-a-e*), drei kleinen Terzen und einer großen Sexte (*e-es-fis-a*), zwei großen Terzen und einer kleinen Sexte (*e-e-gis*).

Für unser Tonsystem bedeuten diese Diskrepanzen, daß immer nur eine begrenzte Anzahl von reinen Intervallen kombinierbar sind. Man könnte z.B. eine Tonleiter aus reinen Dur-Dreiklängen aufbauen:



Man erhält so alle sieben Töne einer diatonischen Skala und müßte sie nur noch in dieselbe Oktave transponieren. Man kann anhand der natürlichen Frequenzverhältnisse aber leicht errechnen, daß das erste *f* und das letzte *d'* eine erheblich unreine Sexte ergeben, so daß zwar die Dur-Dreiklänge dieser Skala sehr gut zu gebrauchen sind, aber der Moll-Dreiklang *d-f-a* nicht. Allgemein gilt deswegen:

Gleichgültig aus welchen reinen Intervallen sich eine Skala zusammensetzt, sie wird immer einige unreine Intervalle enthalten.

Temperieren

Wenn bereits sieben Tönen nicht für alle Zusammenklänge rein stimmbar sind, dann natürlich erst recht nicht alle zwölf Töne unserer chromatischen Tonleiter. Die einzige Möglichkeit, trotzdem eine benutzbare Tonleiter zu konstruieren, ist deshalb, Unreinheiten in Kauf zu nehmen, aber sie möglichst klein zu halten, indem man zwischen den verschiedenen Zusammenklängen ausgleicht: man verteilt die Unreinheit eines Intervalls auf mehrere, die dann *alle* unrein werden, aber in geringerem Maße. Dieses Ausgleichen nennt man **Temperieren** (lat. mäßigen).

Es hat im Laufe der Musikgeschichte verschiedene Temperierungen gegeben, z.B. die sogenannte **mitteltönige Stimmung**, in der die wichtigsten Quinten und Terzen rein sind, einige angeglichen werden und einige unbrauchbar bleiben, wobei man die unbrauchbaren in Tonarten legte, die kaum benutzt wurden. Solcherart Temperierungen sind heute nur noch von historischem Interesse und nur für Musiker von Belang, die sich um größtmögliche Authentizität bei der Aufführung Alter Musik bemühen. In einem enharmonisch chromatischen Tonsystem, das alle Tonarten und viele Modulationen benutzt, führen sie zu keinem befriedigenden Ergebnis. Deswegen hat sich ungefähr zu Bachs Zeiten eine Temperierung durchgesetzt, die zwischen *allen* Tonarten ausgleicht, die sog. **gleichmäßig temperierte Stimmung**.

Glaubt man einigen Musikhistorikern, so ist diese nicht dasselbe wie die **Wohltemperierte Stimmung** Bachs, aber es ist auch nicht bekannt, welche Stimmung Bach für sein **Wohltemperiertes Klavier I und II** benutzt hat, zweier Sammlungen von je 24 Präludien und Fugen in allen Dur- und Moll-Tonarten.

Die Temperierte Stimmung

Zwölf Quinten ergeben sieben Oktaven. Da das Quintverhältnis 3:2 und das Oktavverhältnis 2:1 beträgt, müßte also gelten: $(3/2)^{12} = (2/1)^7$.

Diese Gleichung ist falsch, 12 Quinten ergeben *mehr* als 7 Oktaven, und diese Differenz hat ebenfalls einen Namen: das **pythagoräische Komma**, es beträgt ca. einen Achtelton.

Wenn zwölf Quinten nicht in sieben Oktaven passen wollen, so muß man entweder die Quinten oder die Oktaven angleichen. Da die Oktaven aber für Verstimmungen sehr empfindlich sind, beläßt man sie besser rein und verengt die Quinten, indem man das pythagoräische Komma gleichmäßig auf alle zwölf verteilt

Auf diese Weise verteilt die Temperierte Stimmung 12 Quinten auf 7 Oktaven oder, was im Grunde dasselbe ist, teilt die Oktave in zwölf gleich große Halbtonschritte ein, indem sie eine zu kurze Decke, bei der entweder der Kopf oder die Füße frieren, so streckt, daß beide nur ein bißchen frieren. Dabei werden außer der Oktave alle Intervalle unrein, aber in unterschiedlichem Maße, weil z.B. 4 kleine Terzen, die eine Oktave ergeben sollen, mehr gestreckt (bzw. gestaucht) werden müssen als 12 Quinten, die 7 Oktaven ergeben sollen. Es ergibt sich folgendes (1 Cent = 1/100 Halbtonschritt):

Oktave = rein
 Quinte = zu eng (- 1,95 Cent)
 gr. Terz = zu weit (+ 13,68 Cent)
 kl. Terz = zu eng (- 15,64 Cent)

Die restlichen Intervalle ergeben sich aus der eigentlich trivialen Regel, daß die Umkehrung eines zu weiten Intervalls zu eng wird und umgekehrt, d.h. wenn die Quinte um 1,95 Cent zu eng ist, ist die Quarte um 1,95 Cent zu weit. Einfacher ist übrigens, sich die Abweichung der temperierten von den reinen Intervallen anhand des Dur-Dreiklangs zu merken, in dem die Quinte, in C-dur also das **g**, zu tief und die Durterz, das **e**, zu hoch ist; alles andere kann man dann aus den Dreiklangsumkehrungen ableiten: Wenn das **e** zu hoch ist, muß die Sexte **g-e'** zu weit sein, die Sexte **e-c'** zu eng.

In der Praxis erreicht man die genaue Temperierung, indem man die Quinten so einstimmt, daß ihr erster gemeinsamer Teilton eine bestimmte Schwebungsfrequenz hat, deswegen und weil alle um dasselbe Maß verengt werden, spricht man auch von der **gleichschwebenden Temperierung**. Das ist allerdings eigentlich der falsche Ausdruck, denn die Schwebungen sind nicht vom *relativen* Tonhöhenunterschied abhängig, sondern von der *absoluten* Frequenzdifferenz; sie sind deswegen nicht gleichmäßig, sondern nehmen bei den höheren Tönen zu, indem sie sich einmal pro Oktave verdoppeln.

Weiter oben hatten wir festgestellt, daß verschiedene Intervalle verschieden empfindlich für Verstimmungen sind. In der temperierten Stimmung ergibt sich automatisch, daß die empfindlicheren am wenigsten verstimmt werden: Eine Verstimmung von 13,68 Cent wird bei der Terz vom Ohr noch akzeptiert (obwohl sie hörbar ist), bei der Quinte wäre sie unerträglich.

Das Cent

Die Temperierte Stimmung ist heute für alle Instrumente Standard, deswegen haben die Akustiker sie als Bezugsgröße für relative Tonhöhenverhältnisse definiert. Als Einheitsmaß wird der temperierte Halbtonschritt verwendet (also ein Zwölftel einer Oktave), und Tonhöhenunterschiede werden in Hundertstel davon ausgedrückt, 1 Cent ist also 1/100 eines temperierten Halbtonschriffs.

Da es dabei um Frequenz-*Verhältnisse* und nicht um *Differenzen* geht, ist das Cent ein logarithmisches Maß: Um zu der Oktave (Frequenzverhältnis 2:1) eines Tones zu gelangen, muß man seine Frequenz **mit 2 multiplizieren**; um dies in 1200 Einzelschritten zu tun, muß man seine Frequenz **1200mal mit der 1200. Wurzel aus 2 multiplizieren**, so daß gilt:

$$1 \text{ Cent entspricht } 2^{1/1200} = 1,00058$$

(genauer: 1,0005778 – in recht guter Näherung: 1731/1730)

Ein Ton, der 1 Cent zu hoch ist, weicht also um ca. 0,058 Prozent von seiner Sollfrequenz ab. Die mathematisch korrekte Definition ist: Das Cent ist der Logarithmus des Frequenzverhältnisses zur Basis $2^{1/1200}$. Damit entsprechen

+5 Cent einem Frequenzverhältnis von $(2^{1/1200})^5$: $1 = 1,002892$,

-5 Cent einem Frequenzverhältnis von $(2^{1/1200})^{-5}$: $1 = 0,997116$.

Das Cent ist ein *relatives* Maß, bezeichnet also Tonhöhenunterschiede und nicht *absolute* Tonhöhen, deswegen wäre eigentlich immer der Bezug mit anzugeben. Bezogen auf das *c* hat das darüberliegende temperierte *a* 900 Cent (es liegt 9 Halbtonschritte höher), bezogen auf den Kammerton *a'* hat ein verstimmes *a'* von 441 Hz ca. 4 Cent, nämlich den Logarithmus von 441/440 zur Basis $2^{1/1200}$.

In der Praxis ist die genaue Kenntnis des mathematischen Zusammenhangs entbehrlich, und es genügt zu wissen, daß ein Cent ein Tonhöhenunterschied von 1/100 Halbtonschritt bedeutet.